Teoria ergodyczna
WPPT IIIr. semestr zimowy 2008/9
LISTA 3

11/01/09

We wszystkich zadaniach mamy do czynienia z układem $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$, gdzie μ jest miarą probabilistyczną na σ-ciele $\mathcal{F}$, a T transformacją (nie koniecznie odwracalną) zachowującą miarę μ. Litera f zawsze oznacza mierzalną funkcję rzeczywistą na X.

Zadanie 1. Powiemy, że $\mathcal{C}$ jest *generującą rodziną zbiorów*, jeśli

$$\sigma(\bigcup_n T^{-n}\mathcal{C}) = \mathcal{F},$$

gdzie n przebiega $\mathbb{N}_0$ (dla transformacji nieodwracalnych) lub $\mathbb{Z}$ (dla odwracalnych). Innymi słowy, najmniejsze niezmiennicze σ-ciało zawierające $\mathcal{C}$ jest równe $\mathcal{F}$. Wykaż, że do mieszania wystarczy aby

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) \to \mu(A)\mu(B)$$

dla dowolnych A i B z rodziny generującej.

Zadanie 2. Niech $X = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{S}}$ gdzie $\mathbb{S} = \mathbb{N}_0$ lub $\mathbb{Z}$. Niech $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ będzie miarą probabilistyczną na $\{1, \dots, k\}$ (czyli wektorem probabilistycznym wymiaru k). Korzystając z zadania porzedniego wykaż, że miara produktowa $P^{\mathbb{S}}$ jest mieszająca dla transformacji ,,shift" na X.

Zadanie 3. Niech $X = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}_0}$. Niech M będzie macierzą stochastyczną $k \times k$ dla której wszystkie wiersze macierzy M^n zbiegają do jedynego lewostronnego wektora stałego dla M, $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ (wiemy, że jest tak, jeśli choć jedna kolumna pewnej potęgi macierzy M jest ściśle dodatnia). Korzystając z zadania 1 wykaż, że odpowiednia miara Markowa jest mieszająca dla transformacji ,,shift" na X.

Zadanie 4. Udowodnij jak najprościej, że mieszanie implikuje ergodyczność.

Zadanie 5. Udowodnij, że mieszanie jest równoważne z następującym warunkiem na rzeczywistej przestrzeni Hilberta $L^2(\mu)$:

$$\langle f | g \circ T^n \rangle \to \langle f | 1 \rangle \langle 1 | g \rangle$$

(czyli $\int f \cdot g \circ T^n \, d\mu \to \int f \, d\mu \cdot \int g \, d\mu$).

Zadanie 6. Udowodnij, że mieszanie jest równoważne z następującym warunkiem

$$\forall_{A\in\mathcal{F}} \lim_{n\to\infty} \mu(A\cap T^{-n}(A)) \to \mu(A)^2$$

(Jest to Tw. Rényi z 1958 r.) *Wsk. Najpierw wywnioskować warunek z poprzedniego zadania dla podprzestrzeni funkcji mierzalnych względem σ-ciała generowanego przez A i jego przeciwobrazy, potem rozłożyć dowolną funcję na część należącą do tej podprzestrzeni i część do niej ortogonalną.*

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli istnieje funkcja własna o wartości własnej α różnej od 1 (czyli $f\neq 0$ i $\alpha\neq 1$ takie, że $f\circ T=\alpha f$), to układ nie jest mieszający.